

УДК 519.62/.642

**ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПРИ  
РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО  
НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**З.Ф.ХАНКИШИЕВ**

*Бакинский Государственный Университет*  
*hankishiyev.zf@yandex.ru*

*В настоящей работе исследуется одна задача для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа с нелокальными граничными условиями методом прямых.*

*После применения метода прямых, исследуемая задача сведена к решению задачи Коши для системы линейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.*

*Работа, в основном, посвящена исследованию сходимости решения полученной новой задачи к решению исходной. Доказана сходимость метода прямых и определена скорость сходимости.*

**Ключевые слова:** нагруженные уравнения, метод прямых, принцип максимума.

**1. Постановка задачи и применение метода прямых**

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)u(x, t) + \sum_{k=1}^m b_k(x, t)u(x, t_k) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

граничным условиям

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(l, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Здесь

$k(x, t) > 0$ ,  $b(x, t)$ ,  $b_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $f(x, t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $\varphi(x)$  - из-

вестные непрерывные функции своих аргументов,  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  - действительные числа,  $t_1, t_2, \dots, t_m \in (0, T]$  - фиксированные точки.

Уравнение (1) есть линейное нагруженное дифференциальное уравнение параболического типа. Такие уравнения возникают, например, при исследовании некоторых биологических процессов [1].

Разделив отрезок  $[0, l]$  на  $N$  равных частей точками  $x_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, N, Nh = l$ , и рассмотрев уравнение (1) на прямых  $x = x_n, n = 1, 2, \dots, N - 1$ , задаче (1)-(3) сопоставим задачу

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{y_{n+1}(t) - y_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{y_n(t) - y_{n-1}(t)}{h} \right] +$$

$$+ b(x_n, t)y_n(t) + \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)y_n(t_k) + f(x_n, t), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$\frac{dy_0(t)}{dt} + \alpha_1 y_0(t) + \beta_1 y_N(t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$\frac{dy_N(t)}{dt} + \alpha_2 y_0(t) + \beta_2 y_N(t) = \mu_2(t),$$

$$y_n(0) = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь через  $y_n(t)$  обозначено приближенное значение решения  $u = u(x, t)$  задачи (1)-(3) на прямой  $x = x_n$ . Задача (4)-(6) аппроксимирует исходную задачу (1)-(3) с точностью  $O(h^2)$ , если решение уравнения (1) функция  $u = u(x, t)$  и коэффициент  $k = k(x, t)$  в области  $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  имеют ограниченные частные производные по переменной  $x$  до третьего и второго порядков, соответственно.

Задачу (4)-(6) можно решить методом, изложенным в [2].

Для уравнения (1) с различными граничными условиями доказана сходимость метода прямых [3]-[5]. В этой работе с помощью принципа максимума при некоторых условиях докажем сходимость решения задачи (4)-(6) к решению исходной задачи (1)-(3) и определим скорость сходимости.

## 2. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Рассмотрим задачу (4)-(6) с однородными граничными условиями и однородным начальным условием:

$$\frac{dy_n(t)}{dt} - \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{y_{n+1}(t) - y_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{y_n(t) - y_{n-1}(t)}{h} \right] -$$

$$-b(x_n, t)y_n(t) - \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)y_n(t_k) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

$$\frac{dy_0(t)}{dt} + \alpha_1 y_0(t) + \beta_1 y_N(t) = 0, \quad \frac{dy_N(t)}{dt} + \alpha_2 y_0(t) + \beta_2 y_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$y_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Здесь  $f_n(t) = f(x_n, t)$ .

Из условия (9) для  $y_0(t)$  и  $y_N(t)$  имеем:

$$y_0(t) = 0, \quad y_N(t) = 0. \quad (10)$$

Задача (8), (10) есть задача Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений с однородными начальными условиями. Эта задача имеет только тривиальное решение  $y_0(t) = 0, y_N(t) = 0$ .

Поэтому задача (7)-(9) эквивалентна задаче

$$\frac{dy_n(t)}{dt} - \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{y_{n+1}(t) - y_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{y_n(t) - y_{n-1}(t)}{h} \right] -$$

$$-b(x_n, t)y_n(t) - \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)y_n(t_k) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T. \quad (11)$$

$$y_0(t) = 0, \quad y_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$y_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (13)$$

**Теорема 1 (Принцип максимума).** Пусть функции  $y_n(t), n = 0, 1, \dots, N$ , удовлетворяют уравнениям (11) и условиям (12). Пусть выполняются условия  $f_n(t) \leq 0$  ( $f_n(t) \geq 0$ ),  $0 < t \leq T, n = 1, 2, \dots, N-1$ . Если

$$b_k(x, t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad b(x, t) + \sum_{k=1}^m b_k(x, t) \leq 0, \quad (14)$$

то решение  $y_n(t), n = 1, \dots, N-1$ , отличное от постоянной, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в интервале  $t \in (0, T]$  при  $n = 1, \dots, N-1$ .

**Доказательство.** Докажем первую часть теоремы. Пусть  $f_n(t) \leq 0, 0 < t \leq T, n = 1, 2, \dots, N-1$ , и существует точка  $t_0 \in (0, T]$ , в которой решение уравнения (11) принимает наибольшее положительное значение при  $n = n_0, 0 < n_0 < N$ :

$$y_{n_0}(t_0) = \max_{0 \leq t \leq T, 0 < n < N} y_n(t) = M > 0.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что  $y_{n_0-1}(t_0) < M$ .

Рассмотрев уравнение (11) при  $n = n_0$ , в точке  $t = t_0$ , при наших предположениях имеем:

$$f_{n_0}(t_0) = \frac{dy_{n_0}(t_0)}{dt} - \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n_0+1}, t_0) + k(x_{n_0}, t_0)}{2} \frac{y_{n_0+1}(t_0) - y_{n_0}(t_0)}{h} - \frac{k(x_{n_0}, t_0) + k(x_{n_0-1}, t_0)}{2} \cdot \frac{y_{n_0}(t_0) - y_{n_0-1}(t_0)}{h} \right] - b(x_{n_0}, t_0)y_{n_0}(t_0) - \sum_{k=1}^m b_k(x_{n_0}, t_0)y_{n_0}(t_k) > -b(x_{n_0}, t_0)y_{n_0}(t_0) - \sum_{k=1}^m b_k(x_{n_0}, t_0)y_{n_0}(t_0) = -\left( b(x_{n_0}, t_0) + \sum_{k=1}^m b_k(x_{n_0}, t_0) \right) y_{n_0}(t_0) \geq 0,$$

т.е.  $f_{n_0}(t_0) > 0$ , что противоречит условию  $f_{n_0}(t_0) \leq 0$ .

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

**Теорема 2.** Пусть правые части уравнений (11) удовлетворяют условиям  $f_n(t) \geq 0$  ( $f_n(t) \leq 0$ ),  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $0 < t \leq T$ . Если  $y_0(t) \geq 0$ ,  $y_N(t) \geq 0$ ,  $y_n(0) \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , и выполняются условия (14), то  $y_n(t) \geq 0$  ( $y_n(t) \leq 0$ ),  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

**Следствие.** Пусть выполняются условия (14). Тогда однородная система дифференциальных уравнений, соответствующая системе (11) при условиях (12)-(13) имеет только тривиальное решение  $y_n(t) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

**Теорема 3 (Теорема сравнения).** Пусть  $y_n(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  - решение задачи (11)-(13), а  $\tilde{y}_n(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  - решение задачи, полученной при замене в (11)-(13) функций  $f_n(t)$ , соответственно, на  $\tilde{f}_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Тогда, если выполняются условия  $|f_n(t)| \leq \tilde{f}_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $0 < t \leq T$ , то при выполнении условий (14) имеет место неравенство  $|y_n(t)| \leq \tilde{y}_n(t)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

**Замечание.** Утверждение теоремы 3 справедливо и в случае, если в задаче относительно  $\tilde{y}_n(t)$  правые части равенств и условий, соответствующих равенствам (12) и условиям (13) неотрицательны.

### 3. Сходимость

Пусть  $u(x_n, t)$  - значение точного решения задачи (1)-(3) на прямой  $x = x_n$ ,  $y_n(t)$  - решение задачи (4)-(6). Введем вспомогательную функцию

$$z_n(t) = y_n(t) - u(x_n, t), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

Для этой функции получим:

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{z_{n+1}(t) - z_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{z_n(t) - z_{n-1}(t)}{h} \right] +$$

$$+ b(x_n, t)z_n(t) + \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)z_n(t_k) + h^2 R_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T. \quad (16)$$

$$\frac{dz_0(t)}{dt} + \alpha_1 z_0(t) + \beta_1 z_N(t) = 0, \quad \frac{dz_N(t)}{dt} + \alpha_2 z_0(t) + \beta_2 z_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

$$z_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Функции  $z_0(t)$  и  $z_N(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (17) и условиям  $z_0(0) = 0$ ,  $z_N(0) = 0$  тождественно равны нулю. С учетом этого задача (16)-(18) будет эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{z_{n+1}(t) - z_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{z_n(t) - z_{n-1}(t)}{h} \right] +$$

$$+ b(x_n, t)z_n(t) + \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)z_n(t_k) + h^2 R_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < t \leq T. \quad (19)$$

$$z_0(t) = 0, \quad z_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

$$z_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (21)$$

Используя формулу Тейлора, легко можно показать, что

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{3} KM,$$

если функция  $k = k(x, t)$  и решение уравнения (1) – функция  $u = u(x, t)$  имеют в области  $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  непрерывные частные производные по  $x$  до третьего и четвертого порядков, соответственно. Здесь

$$K = \sup_D \left\{ |k(x, t)|, |k'_x(x, t)|, |k''_x(x, t)|, |k'''_x(x, t)| \right\},$$

$$M = \left\{ |u'_x(x, t)|, |u''_x(x, t)|, |u'''_x(x, t)|, |u^{IV}_x(x, t)| \right\}.$$

Пусть

$$\tilde{z}_n(t) = Lh^2 \xi (l - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (22)$$

Здесь  $L > 0$ ,  $\xi > 0$  – постоянные. Очевидно, что функция  $\tilde{z}_n(t)$  есть неотрицательная функция. При выполнении условий (14) для этой функции после элементарных преобразований имеем:

$$\frac{d\tilde{z}_n(t)}{dt} - \frac{1}{h} \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} \frac{\tilde{z}_{n+1}(t) - \tilde{z}_n(t)}{h} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \frac{\tilde{z}_n(t) - \tilde{z}_{n-1}(t)}{h} \right] -$$

$$- b(x_n, t)\tilde{z}_n(t) - \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t)\tilde{z}_n(t_k) = Lh\xi \left[ \frac{k(x_{n+1}, t) + k(x_n, t)}{2} - \frac{k(x_n, t) + k(x_{n-1}, t)}{2} \right] -$$

$$- \left[ b(x_n, t) + \sum_{k=1}^m b_k(x_n, t) \right] Lh^2 \xi (l - x_n) \geq Lh^2 \xi \frac{k(x_{n+1}, t) - k(x_{n-1}, t)}{2h} =$$

$$= Lh^2 \xi \cdot k'_x(\bar{x}_n, t) \geq Lh^2 \xi k_0 \geq Lh^2, \quad (23)$$

если  $\xi k_0 \geq 1$ . Здесь  $x_{n-1} < \bar{x}_n < x_{n+1}$ ,  $k_0 = \inf_D k'_x(x, t) > 0$ .

С другой стороны имеем:

$$\tilde{z}_0(t) = Lh^2 \xi l > 0, \quad z_N(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (24)$$

$$\tilde{z}_n(0) = Lh^2 \xi (l - x_n) \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (25)$$

Пусть  $L = \frac{2}{3} KM$ . Тогда сравнивая задачу (19)-(21) с задачей (23)-

(25) в силу теоремы сравнения имеем:

$$|z_n(t)| \leq \tilde{z}_n(t), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

или

$$|y_n(t) - u(x_n, t)| \leq Lh^2 \xi l, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (26)$$

Итак, имеет место следующая

**Теорема 4.** Пусть коэффициент  $k(x, t)$  уравнения (1) удовлетворяет условию  $k'_x(x, t) \geq k_0 > 0$ , а коэффициенты  $b(x, t)$ ,  $b_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , условиям (14). Если выполняется условие  $\xi \geq \frac{1}{k_0}$ , то решение задачи (4)-(6) сходится к решению задачи (1)-(3). При этом имеет место оценка (26).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.
2. Khankishiyev Z.F., Mammadova J.A. On the transference of boundary conditions for a system of linear loaded differential equations. 24-th Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector. June 23-26, 2010, Izmir, Turkey, p.62-65.
3. Khankishiyev Z.F., Julfayeva Ch.E. Investigation of the convergence of method of lines while solving a problem of linear loaded differential equation of parabolic type. 24-th Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector. June 23-26, 2010, Izmir, Turkey, p.57-61.
4. Xankişiyev Z.F. Parabolik tip yüklənmiş xətti diferensial tənliklər üçün bir məsələnin düz xətlər üsulu ilə həlli. Nizami Gəncəvinin 870 illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər" Beynəlxalq Konfransının materialları. Gəncə, 23-25 sentyabr 2011-ci il, s. 16-20.
5. Ханкишиев З.Ф. О сходимости метода прямых при решении одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа с нелокальными граничными условиями. Теоретические и практические аспекты развития современной науки. Материалы III Международной научно-практической конференции. М.: 27-28 марта 2012, с.25-30.

## XƏTTİ YÜKLƏNMİŞ PARABOLİK TİP DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN DÜZ XƏTLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİNİN YIĞILMASININ TƏDQIQI

Z.F.XANKIŞIYEV

### XÜLASƏ

Məqalədə xətti yüklənmiş parabolik tip diferensial tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərtli bir məsələ düz xətlər üsulu ilə tədqiq edilib. Düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində məsələ bir tərtibli xətti adi diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə gətirilib. İş, əsasən, düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində alınan yeni məsələnin ilkin məsələnin həllinə yığılmasının tədqiqinə həsr olunub. Müəyyən şərtlər daxilində düz xətlər üsulunun yığılması isbat olunub və yığılma sürəti təyin edilib.

**Açar sözlər:** yüklənmiş tənliklər, düz xətlər üsulu, maksimum prinsipi.

## INVESTIGATION OF THE CONVERGENCE AT THE SOLUTION OF THE METHOD OF LINES FOR LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION OF THE PARABOLIC TYPE

Z.F.KHANKISHIYEV

### SUMMARY

In this work, we investigate the method of lines of one problem with the nonlocal condition for a linear loaded differential equation of the parabolic type. After applying the method of lines, the problem is reduced to the Cauchy problem for a system of linear ordinary differential equation. The work is mainly dedicated to the investigation of the convergence of the solution to a newly obtained problem by applying the method of lines. In some conditions the convergence of the method of lines is proven and the rate of convergence is determined

**Key words:** loaded equations, method of lines, principle of maximum

*Принято в редакцию: 05.03.2013 г.  
Подписано к печати: 06.03.2013 г.*